数理解析研究所講究録 1218 巻 2001 年 15-25

BPZ系列について(Survey)

庵原　謙治（神戸大、理、数）

概要

ここでは、Virasoro代数の表現論に関して[FeFu1]で得られている結果の内、Belavin-Polyakov-Zamolodchikov (BPZ)系列と呼ばれる場合について、入門的な解説を試みる。

1　舞台設定

この節では、種々の記号を設定し、良く知られている基本的な事実について復習する。

まず、主役の代数であるVirasoro代数の定義を思い起こそう：

定義 1.1 *Virasoro*代数Virとは、$\mathbb{C}$-*vector space*

$$\mathrm{Vir} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}c$$

であって、以下の交換関係を満たす*Lie*代数である：

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}c,$$
$$[\mathrm{Vir}, c] = \{0\}.$$

このLie代数は三角分解

$$\mathrm{Vir} = \mathrm{Vir}^+ \oplus \mathrm{Vir}^0 \oplus \mathrm{Vir}^-, \qquad \mathrm{Vir}^\pm := \bigoplus_{\pm n\in\mathbb{Z}_{>0}} \mathbb{C}L_n, \quad \mathrm{Vir}^0 := \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}c$$

を持つ。従って、Virasoro代数のHighest Weight Moduleと呼ばれる表現を考え得るが、まずその中で最も、`universalなもの’を定義しよう：

定義 1.2 $(z,h)\in\mathbb{C}^2$ $(\cong (\mathrm{Vir}^0)^*)$に対して、$\mathrm{Vir}^{\geq} := \mathrm{Vir}^0 \oplus \mathrm{Vir}^+$-*module* $\mathbb{C}_{z,h} := \mathbb{C}\mathbf{1}_{z,h}$を以下で定める。

$$c.\mathbf{1}_{z,h} = z\mathbf{1}_{z,h}, \quad L_0.\mathbf{1}_{z,h} = h\mathbf{1}_{z,h}, \qquad \mathrm{Vir}^+.\mathbf{1}_{z,h} := 0.$$

このとき、*highest weight*が(z,h)の*Verma*加群 $M(z,h)$とは誘導加群

$$M(z,h) := \mathrm{Ind}_{U(\mathrm{Vir}^{\geq})}^{U(\mathrm{Vir})}\mathbb{C}_{z,h} = U(\mathrm{Vir}) \otimes_{U(\mathrm{Vir}^{\geq})} \mathbb{C}_{z,h}$$

のことである。

このとき、以下は容易にわかる：

補題 1.1 $(z,h) \in \mathbb{C}^2$ $(\cong (\mathrm{Vir}^0)^*)$に対して、

1. $M(z,h)$はVir^0-*diagonalizable*である, *i.e.*,

$$M(z,h) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} M(z,h)_{h+n}, \qquad M(z,h)_{h+n} := \{u|L_0.u = (h+n)u\}.$$

2. 正の整数$n \in \mathbb{Z}_{>0}$にたいして、

$$\dim M(z,h)_{h+n} = p(n) \ (n\text{の分割数}) < \infty.$$

3. $M(z,h)$は唯１つの極大部分加群$J(z,h)$を持つ,*i.e.*,

$$L(z,h) := M(z,h)/J(z,h)$$

は*highestweight*が(z,h)の既約*highest weight*加群。

本稿の目的は、[BPZ]で、質量0の臨界点に於ける格子模型を分類するのに現れた、いわゆる'BPZ'系列（又は、Minimal系列）と呼ばれる表現について、その構造の初等的な解説を行うことである。以下において**BPZ**系列といえば、次のDataが固定されているものとする。

まず、正の整数$p,q \in \mathbb{Z}_{>1}$であって、互いに素なものを固定する。このとき、

$$z := 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}$$

とする。また、$\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$に対して、

$$h_{\alpha,\beta} := \frac{(\alpha p - \beta q)^2 - (p-q)^2}{4pq}$$

とする。次に、正の整数$r,s \in \mathbb{Z}_{>0}$であって、$r<q, s<p$を満たすものを固定し、整数$i \in \mathbb{Z}$に対して、

$$h_i := \begin{cases} h_{(i-1)q+r,-s} & i \equiv 1 \mod 2, \\ h_{iq+r,s} & i \equiv 0 \mod 2 \end{cases}$$

とおく。 □

2 種（たね）

この節では、BPZ系列に属するVerma加群$M(z,h_i)$の構造を調べるために有用な表現論の道具(Jantzen Filtration)について簡単に復習する。詳しくは、[Ja]を見られよ。

まず、Verma加群$M(z,h)$が与えられた時、最初に考える問題は

<u>問い</u>　$M(z,h)$は既約か？

であろう。この問いに対する答えを与えるため、$M(z,h)$上の反変形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h}$を以下で定義する。まず、

$$\sigma : U(\mathrm{Vir}) \longrightarrow U(\mathrm{Vir}), \quad L_n \mapsto L_{-n}\ (n\in\mathbb{Z}), \quad c\mapsto c$$

をanti-involutionとする。次に、直和分解

$$U(\mathrm{Vir}) = U(\mathrm{Vir}^0) \oplus \{\mathrm{Vir}^- U(\mathrm{Vir}) + U(\mathrm{Vir})\mathrm{Vir}^+\}$$

に関して第1成分への射影を

$$\pi : U(\mathrm{Vir}) \longrightarrow U(\mathrm{Vir}^0) \cong \mathbb{C}[(\mathrm{Vir}^0)^*]$$

とする。

定義 2.1 $(z,h)\in(\mathrm{Vir}^0)^*\cong\mathbb{C}^2$**に対して、**$M(z,h)$**上の反変形式** (*contravariant form*) $\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h}$ とは、

$$\begin{array}{rcccl}\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h} : M(z,h)\times M(z,h) & \longrightarrow & U(\mathrm{Vir}^-)\times U(\mathrm{Vir}^-) & \longrightarrow U(\mathrm{Vir}^0) & \longrightarrow \mathbb{C}, \\ (x.v_{z,h},\ y.v_{z,h}) & \longmapsto & (x,\ y) & \longmapsto \pi(\sigma(x)y) & \longmapsto \pi(\sigma(x)y)(z,h).\end{array}$$

で定義されるものである。但し、$x,y\in U(\mathrm{Vir}^-)$,$v_{z,h}:=1\otimes\mathbf{1}_{z,h}$とする。

このとき、以下の定理は良く知られており、その証明も簡単である。

定理 2.1 $(z,h)\in(\mathrm{Vir}^0)^*$**とする。このとき、**

1. (対称性) $\langle u,w\rangle_{z,h}=\langle w,u\rangle_{z,h}\quad (u,w\in M(z,h))$.
2. (反変性) $\langle x.u,w\rangle_{z,h}=\langle u,\sigma(x).w\rangle_{z,h}\quad (x\in U(\mathrm{Vir}),u,w\in M(z,h))$.
3. $\mathrm{Rad}\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h}=\{u\in M(z,h)\,|\,\langle u,w\rangle_{z,h}=0\ (\forall w\in M(z,h))\}$ は$M(z,h)$の極大部分加群.

上記の定理2.1の2で特に$x=L_0$とおくことにより、以下の系を得る：

系 2.2 $n,m\in\mathbb{Z}_{>0}$**に対して、**$m\neq n$**ならば**

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h}|_{M(z,h)_{h+m}\times M(z,h)h+n}=0.$$

そこで、$n\in\mathbb{Z}_{>0}$に対して、

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h;n}:=\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h}|_{M(z,h)_{h+n}\times M(z,h)h+n}$$

とおき、これが非退化かどうかを調べれば良い。つまり、定理2.1及び系2.2より、

系 2.3　以下は同値：

$$M(z,h):\ 既約\ \Longleftrightarrow\ \mathrm{Rad}\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h;n}:=\mathrm{Rad}\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h}\cap M(z,h)_{h+n}=\{0\}\quad\forall n\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

そこで、補題1.1の2より、$n\in\mathbb{Z}_{>0}$に対して、$\{u_i\}_{1\le i\le p(n)}$を$M(z,h)_{h+n}$の基底とするとき、

$$\det\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h;n}:=\det\left((\langle u_i,u_j\rangle_{z,h})_{1\le i,j\le p(n)}\right)$$

がわかれば良い。これについては、以下の公式が知られている（証明は、e.g., [TK]を見られよ）：

定理 2.4 (Kac determinant) $n \in \mathbb{Z}_{>0}$とするとき、基底の選び方によるスカラー倍を除いて、以下が成立：

$$(\det\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h;n})^2 \propto \prod_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_{>0}\\ 1\le\alpha\beta\le n}} \Phi_{\alpha,\beta}(z,h)^{p(n-\alpha\beta)},$$

但し、

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha,\beta}(z,h) := &\left\{h+\frac{1}{24}(\alpha^2-1)(z-13)+\frac{1}{2}(\alpha\beta-1)\right\}\\ &\times\left\{h+\frac{1}{24}(\beta^2-1)(z-13)+\frac{1}{2}(\alpha\beta-1)\right\}+\frac{1}{16}(\alpha^2-\beta^2)^2\end{aligned}$$

とする。

さて、BPZ系列の場合、$M(z,h_i)$ $(i\in\mathbb{Z})$は既約であろうか？ 否、(幸か不幸か) $M(z,h_i)$は被約である。そこで、$\mathrm{Rad}\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h_i}$の構造を調べてやる必要がある。

そこで、一般にVerma加群$M(z,h)$ $((z,h)\in(\mathrm{Vir}^0)^*)$が被約なとき、$\mathrm{Rad}\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h}$の構造を見るために、$(z,h)\in(\mathrm{Vir}^0)^*$ を\`genericな方向に' 少し\`摂動' してやって、$\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h}$の\`退化の度合い' を調べる方法が知られている。これは、Jantzen Filtrationと呼ばれ, $M(z,h)$の部分加群の減少列からなるもので、以下に於いて簡単に説明する。なお、記述の簡明さのため、少しサボった導入をするので、納得のいかない人は[Ja]の第5章を見られよ。

まず、Tを不定元とする1変数の多項式環を$\mathbb{C}[T]$とする。そして、$(z,h)\in(\mathrm{Vir}^0)^*$に対して、$(z',h')\in(\mathrm{Vir}^0)^*$ を'genericな方向'、つまり任意の$\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_{>0}$に対して

$$\Phi_{\alpha,\beta}(z+Tz',h+Th')\in\mathbb{C}[T]\setminus T^2\mathbb{C}[T]$$

を満たすものから1つ選び、それを固定する。このとき、

$$\begin{array}{rcccl}\langle\cdot,\cdot\rangle^T_{z,h}: M(z,h)\times M(z,h) & \longrightarrow & U(\mathrm{Vir}^-)\times U(\mathrm{Vir}^-) & \longrightarrow & \mathbb{C}[T],\\ (x.v_{z,h},\ y.v_{z,h}) & \longmapsto & (x,\ y) & \longmapsto & \pi(\sigma(x)y)\{(z,h)+T(z',h')\}\end{array}$$

とするとき、$k\in\mathbb{Z}_{>0}$に対して、

$$M(z,h)(k) := \{u|\mathrm{ord}_T\langle u,w\rangle^T_{z,h}\ge k\quad(\forall w\in M(z,h))\}$$

とおく。但し、$P(T)\in\mathbb{C}[T]\setminus\{0\}$に対して、$k:=\mathrm{ord}_T P(T)$とは、

$$T^k|P(T),\qquad T^{k+1}\not| P(T)$$

を満たす整数$k\in\mathbb{Z}$のことである。($P(T)=0$の場合は $\mathrm{ord}_T P(T)=\infty$と約束する。) また、$n\in\mathbb{Z}_{>0}$とするとき、$M(z,h)_{h+n}$の基底$\{u_i\}_{1\le i\le p(n)}$を用いて、

$$\det\langle\cdot,\cdot\rangle^T_{z,h;n} := \det\left(((\langle u_i,u_j\rangle^T_{z,h})_{1\le i\le p(n)}\right)$$

と定義する。このとき、以下の定理が成立する：

定理 2.5 ([Ja]) *1.* $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して、$M(z,h)(k)$は$M(z,h)$の部分Vir-加群である。特に、$M(z,h)(1)=\mathrm{Rad}\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h}$は$M(z,h)$の極大部分加群である。

2. $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、商加群$M(z,h)(k)/M(z,h)(k+1)$上に非退化な反変形式が存在する。
   ($T^{-k}\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h}^{T}|_{T=0}$を考えよ。)

3. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$に対して、以下の等式が成立する：

$$\mathrm{ord}_T \det\langle\cdot,\cdot\rangle_{z,h;n}^{T} = \sum_{k=1}^{\infty} \dim\{M(z,h)(k)\}_{h+n}.$$

   但し、

$$M(z,h)(k)_{h+n} := \{u \in M(z,h)(k) | L_0.u = (h+n)u\}$$

   とする。

特に、BPZ系列の場合、上記の定理2.5の3を適用すると以下の系を得る：

系 2.6 $i \in \mathbb{Z}$及び$n \in \mathbb{Z}_{>0}$とする。このとき、以下の等式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dim M(z,h_i)(k)_{h_i+n} = \sum_{k=1}^{\infty}\{\dim M(z,h_{|i|+2k-1})_{h_i+n} + \dim M(z,h_{-|i|-2k+1})_{h_i+n}\}$$

この式は、以下の2点を証明すれば得られる：

1. $\{h_i + \alpha\beta | (\alpha,\beta) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2 \text{ s.t. } \Phi_{\alpha,\beta}(z,h_i) = 0\} = \{h_{|i|+2k-1}, h_{-|i|-2k+1} | k \in \mathbb{Z}_{>0}\}$.

2. (z,h_i) に対して、$(0,1) \in (Vir^0)^*$はgenericであり、従って、$\mathrm{ord}_T\Phi_{\alpha,\beta}(z,h_i+T) \leq 1$ を満たす。

3 前振り

この節では、BPZ系列の場合のVerma加群$M(z,h_i)$ ($i \in \mathbb{Z}$)のJantzen Filtrationの構造を調べるためにVerma加群の埋め込みDiagramを構成する。

まず、一般の$(z,h) \in (\mathrm{Vir}^0)^*$に対して、以下の命題が成立する。

命題 3.1 任意の$n \in \mathbb{Z}_{>0}$に対して、

$$\dim\{M(z,h)_{h+n}\}^{\mathrm{Vir}^+} \leq 1.$$

但し、

$$\{M(z,h)_{h+n}\}^{\mathrm{Vir}^+} := \{u \in M(z,h)_{h+n} | \mathrm{Vir}^+.u = \{0\}\}$$

である。($\{M(z,h)_{h+n}\}^{\mathrm{Vir}^+} \setminus \{0\}$の元は、*singular vector*と呼ばれる。)

<u>証明の方針:</u>「第1ステップ」$n \in \mathbb{Z}_{>0}$に対してまず$\mathcal{P}_n := \{(1^{r_1}2^{r_2}\cdots n^{r_n}) | r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^{n} ir_i = n\}$を$n$の分割とし、$\mathbb{I} = (1^{r_1}2^{r_2}\cdots n^{r_n}) \in \mathcal{P}_n$に対し、$e_{\mathbb{I}} := L_{-n}^{r_n}\cdots L_{-2}^{r_2}L_{-1}^{r_1}$とおく。このとき、$\{e_{\mathbb{I}}.v_{z,h} | \mathbb{I} \in \mathcal{P}_n\}$ ($v_{z,h} = 1 \otimes \mathbf{1}_{z,h}$) は$M(z,h)_{h+n}$の基底をなす。

「第2ステップ」$n \in \mathbb{Z}_{>0}$に対して、$\mathcal{P}_n$上の全順序$>$を以下で定義する: $\mathbb{I} = (1^{r_1}2^{r_2}\cdots n^{r_n}), \mathbb{J} = (1^{s_1}2^{s_2}\cdots n^{s_n}) \in \mathcal{P}_n$,

$$\mathbb{I} > \mathbb{J} \iff \exists m \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ s.t. } m \leq n, \begin{cases} r_k = s_k & k < m, \\ r_k > s_k & k = m. \end{cases}$$

「第3ステップ」$n \in \mathbb{Z}_{>0}$に対して、$w \in \{M(z,h)_{h+n}\}^{\mathrm{Vir}^+} \setminus \{0\}$が存在するとせよ。このとき、

$$w = \sum_{\mathbb{I} \in \mathcal{P}_n} c_{\mathbb{I}}^{w} e_{\mathbb{I}}.v_{z,h}$$

とおく。$\mathbb{J} = (1^{s_1}j^{s_j}\cdots n^{s_n}) \in \mathcal{P}_n$ $(\exists j \in \mathbb{Z}_{>1} \text{ s.t. } s_j > 0)$であって$c_{\mathbb{J}}^{w} \neq 0$を満たすものに対して、$\mathbb{J}' := (1^{s_1+1}j^{s_j-1}\cdots n^{s_n}) \in \mathcal{P}_{n-j+1}$とおく。また、

$$w' := L_{j-1}.w = \sum_{\mathbb{I}' \in \mathcal{P}_{n-j+1}} c_{\mathbb{I}'}^{w'} e_{\mathbb{I}'}.v_{z,h}$$

と定義する。このとき、等式

$$c_{\mathbb{J}'}^{w'} = \alpha_{\mathbb{J}}^{w} c_{\mathbb{J}}^{w} + \sum_{\substack{\mathbb{I} \in \mathcal{P}_n \\ \mathbb{I} > \mathbb{J}}} Q_{\mathbb{J}}^{w;\mathbb{I}} c_{\mathbb{I}}^{w}$$

を満たす$\alpha_{\mathbb{J}}^{w} \in \mathbb{C}^*$及び $Q_{\mathbb{J}}^{w;\mathbb{I}} \in \mathbb{C}$が存在する。

「第4ステップ」第3ステップで得られた $\{c_{\mathbb{J}}^{w}\}$に関する等式のtriangularityから、一意性が従う。 □

さて、Kac determinantとsingular vectorの存在との関係について,以下の補題が成立する。

補題 3.2 $(z,h) \in (\mathrm{Vir}^0)^*$**に対して、**$\Phi_{\alpha,\beta}(z,h) = 0$**を満たす正の整数**$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{>0}$**が存在するとする。このとき、**

$$\dim\{M(z,h)_{h+\alpha\beta}\}^{\mathrm{Vir}^+} = 1.$$

この補題は以下のように証明される。まず、

$$\begin{aligned} Z_{\alpha,\beta} : &= \{(z,h) \in (\mathrm{Vir}^0)^* | \Phi_{\alpha,\beta}(z,h) = 0\} \\ &= \{(z(t), h_{\alpha,\beta}(t)) | t \in \mathbb{C}^*\} \end{aligned}$$

但し、

$$z(t) := 1 - 6\frac{(t-1)^2}{t}, \quad h_{\alpha,\beta}(t) := \frac{(\alpha t - \beta)^2 - (t-1)^2}{4t}$$

とおく。ここで、$t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$のとき、$\Phi_{\gamma,\delta}(z(t), h_{\alpha,\beta}(t)) = 0$を満たす $(\gamma,\delta) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2$は$(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2$に存在しないことが示され、このとき、

$$\det\langle\cdot,\cdot\rangle_{z(t),h_{\alpha,\beta}(t);n} \neq 0 \quad \forall n < \alpha\beta$$

を満たすことがわかる。このことから、定理2.1に注意すると、

$$\exists w(t)=\sum_{\mathbb{I}\in\mathcal{P}_{\alpha\beta}} c_{\mathbb{I}}^{w(t)}(t)e_{\mathbb{I}}.v_{z,h}\in\{M(z(t),h_{\alpha,\beta}(t))_{h_{\alpha,\beta}(t)+\alpha\beta}\}^{\mathrm{Vir}^+}\setminus\{0\}$$

てあることが従う。特に、係数たち$\{c_{\mathbb{I}}^{w}(t)\}_{\mathbb{I}\in\mathcal{P}_{\alpha\beta}}$は互いに素な$t$の多項式になっているとしてよい。後は、$(z(t),h_{\alpha,\beta}(t))=$ 補題の (z,h)となるようなtを $t=t_0\in\mathbb{C}^*$として、$w(t_0)$を考えれば命題3.1より、証明が完了する。

以上の準備の基で、BPZ系列に属するVerma加群の埋め込みDiagramを構成する。まず、記号の準備として、整数$i\in\mathbb{Z}$に対して、$[h_i]:=M(z,h_i)$とし、Verma加群$M(z,h_i)$ から Verma加群$M(z,h_j)$ $(i,j\in\mathbb{Z})$ への単射を

$$[h_i]\rightarrowtail[h_j].$$

で表すことにする。このとき、系2.6の証明の方針で述べた事実, 命題3.1及び 補題3.2を用いると次の可換図式の存在が容易に構成される。

図 1: 埋め込みDiagram

$$\begin{tikzcd}
 & {[h_0]} & \\
{[h_1]} \arrow[ur, tail] & & {[h_{-1}]} \arrow[ul, tail] \\
{[h_2]} \arrow[u, tail] \arrow[urr, tail] & & {[h_{-2}]} \arrow[u, tail] \arrow[ull, tail] \\
{[h_3]} \arrow[u, tail] \arrow[urr, tail] & & {[h_{-3}]} \arrow[u, tail] \arrow[ull, tail] \\
{[h_4]} \arrow[u, tail] \arrow[urr, tail] & \vdots & {[h_{-4}]} \arrow[u, tail] \arrow[ull, tail] \\
\vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

4 本ねた

この節では、前節で構成したBPZ系列に属するVerma加群の間の埋め込みDiagram(図1)を用いて、Verma加群$M(z,h_i)$のJantzen Filtrationの構造を決定する。また、その応用として$L(z,h_i)$の対するBernstein-Gel'fand-Gel'fand型のResolutionを構成し、特に既約表現$L(z,h_0)$の指標をϑ函数とDedekindのη函数を用いて書き表わす。なお、記号の煩雑さを避けるため、図1の埋め込みによるImageとPre-Imageを記号の上で、区別しないことにする。

まず、天下りではあるが$i\in\mathbb{Z}$ 及び$k\in\mathbb{Z}_{>0}$にたいして、Verma加群$M(z,h_i)$の部分加群$N(z,h_i)(k)$を以下で定義する：

$$N(z,h_i)(k):=M(z,h_{|i|+k})+M(z,h_{-|i|-k})\subset M(z,h_i).$$

このとき、以下の定理が成立する。

定理 4.1 任意の$i \in \mathbb{Z}$及び$k \in \mathbb{Z}_{>0}$に対して、$M(z,h_i)(k) = N(z,h_i)(k)$.

証明 まず、$M(z,h_i)(k) \supset N(z,h_i)(k)$ を示す。
これは、定理2.5及び埋め込みDiagram(図1)より、kについての数学的帰納法で 証明できる。

次に、$M(z,h_i)(k) = N(z,h_i)(k)$ を示す。
$n \in \mathbb{Z}_{>0}$とし、任意の $0 \le m < n$ なる $m \in \mathbb{Z}$ 及び任意の$i \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$に対して、

$$M(z,h_i)(k)_{h_i+m} = N(z,h_i)_{h_i+m}$$

が成立していると仮定する。(帰納法の最初のステップはtrivial。) このとき、

$$M(z,h_i)(k)_{h_i+n} = N(z,h_i)_{h_i+n}$$

が成立することを以下で示す。まず、次のComplexはL_0-weight$= h_i + n$ のところでacyclicである：

$$\begin{aligned}
&\cdots \xrightarrow{d_{j+1}} M(z,h_{|i|+k+j}) \oplus M(z,h_{-|i|-k-j}) \xrightarrow{d_j} \cdots \\
&\cdots \xrightarrow{d_2} M(z,h_{|i|+k+1}) \oplus M(z,h_{-|i|-k-1}) \xrightarrow{d_1} M(z,h_{|i|+k}) \oplus M(z,h_{-|i|-k}) \\
&\xrightarrow{d_0} N(z,h_i)(k) \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

但し、

$$d_0(x,y) := x+y, \qquad d_j(x,y) := (x+y, -x-y) \quad (j>0)$$

とする。実際、これがComplexになっていること, i.e., $\mathrm{Ker}d_j \supset \mathrm{Im}d_{j+1}$ ($j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$)は定義より明らか。よって、$\mathrm{Ker}d_j \subset \mathrm{Im}d_{j+1}$を示せば良い。ところで、定義より$d_0$は全射である。また、$j \in \mathbb{Z}_{>0}$に対して定義より、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}d_j &= \{(x,-x) | x \in M(z,h_{|i|+k+j}) \cap M(z,h_{-|i|-k-j})\}, \\
\mathrm{Im}d_{j+1} &= \{(x,-x) | x \in M(z,h_{|i|+k+j+1}) + M(z,h_{-|i|-k-j-1})\}.
\end{aligned}$$

ここで、$M(z,h_{|i|+k+j})(1)$は$M(z,h_{|i|+k+j})$の極大部分加群（cf. 定理2.5の1）だから,

$$M(z,h_{|i|+k+j}) \cap M(z,h_{-|i|-k-j}) \subset M(z,h_{|i|+k+j})(1)$$

となる。また、このとき、$h_i + n = h_{|i|+k+j} + (h_i - h_{|i|+k+j} + n)$であり、$h_i - h_{|i|+k+j} + n \lneq n$ ゆえ、帰納法の仮定から

$$(M(z,h_{|i|+k+j})(1))_{h_i+n} = (N(z,h_{|i|+k+j})(1))_{h_i+n}$$

となる。従って、$N(z,h_{|i|+k+j})(1)$の定義より、

$$\begin{aligned}
\big(M(z,h_{|i|+k+j}) \cap M(z,h_{-|i|-k-j})\big)_{h_i+n} &\subset (M(z,h_{|i|+k+j})(1))_{h_i+n} = (N(z,h_{|i|+k+j})(1))_{h_i+n} \\
&= \big(M(z,h_{|i|+k+j+1}) + M(z,h_{-|i|-k-j-1})\big)_{h_i+n},
\end{aligned}$$

すなわち、$\mathrm{Ker}d_j \subset \mathrm{Im}d_{j+1}$が$L_0$-weight$= h_i + n$のところで成立する。
次に、Euler-Poincaré Principle により、

$$\dim N(z,h_i)(k)_{h_i+n} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \{\dim M(z,h_{|i|+k+j-1})_{h_i+n} + \dim M(z,h_{-|i|-k-j+1})_{h_i+n}\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dim N(z,h_i)(k)_{h_i+n} = \sum_{k=1}^{\infty}\{\dim M(z,h_{|i|+2k-1})_{h_i+n} + \dim M(z,h_{-|i|-2k+1})_{h_i+n}\}$$

を得る。一方、系2.6より、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dim M(z,h_i)(k)_{h_i+n} = \sum_{k=1}^{\infty} \dim N(z,h_i)(k)_{h_i+n}$$

となり、既に示されている包含関係より、

$$M(z,h_i)(k)_{h_i+n} = N(z,h_i)(k)_{h_i+n}$$

が従う。 □

さて、上記の定理4.1の1つの系として、既約highest weight module $L(z,h_i)$ のBernsten-Gel'fand-Gel'fand(BGG)型のResolutionが得られる：

系 4.2 (BGG分解) 任意の$i \in \mathbb{Z}$に対して、次の完全列が存在する：

$$\begin{aligned}&\cdots \longrightarrow M(z,h_{|i|+j}) \oplus M(z,h_{-|i|-j}) \longrightarrow \cdots\\ &\cdots \longrightarrow M(z,h_{|i|+1}) \oplus M(z,h_{-|i|-1}) \longrightarrow M(z,h_i) \longrightarrow L(z,h_i) \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

<u>証明</u> まず、定理2.5の1及び定理4.1より、以下の短完全列を得る：

$$0 \longrightarrow N(z,h_i)(1) = M(z,h_i)(1) \longrightarrow M(z,h_i) \longrightarrow L(z,h_i) \longrightarrow 0.$$

また、$N(z,h_i)(1)$の定義より、次の列も完全：

$$0 \longrightarrow M(z,h_{|i|+1}) \cap M(z,h_{-|i|-1}) \longrightarrow M(z,h_{|i|+1}) \oplus M(z,h_{-|i|-1}) \longrightarrow N(z,h_i)(1) \longrightarrow 0$$

であるが、定理4.1より、$M(z,h_{|i|+1}) \cap M(z,h_{-|i|-1}) \cong N(z,h_{|i|+1})(1)$ゆえ、以下の短完全列を得る：

$$0 \longrightarrow N(z,h_{|i|+1})(1) \longrightarrow M(z,h_{|i|+1}) \oplus M(z,h_{-|i|-1}) \longrightarrow N(z,h_i)(1) \longrightarrow 0.$$

以下同様に$k \in \mathbb{Z}_{>0}$に対して、短完全列

$$0 \longrightarrow N(z,h_{|i|+k+1})(1) \longrightarrow M(z,h_{|i|+k+1}) \oplus M(z,h_{-|i|-k-1}) \longrightarrow N(z,h_{|i|+k})(1) \longrightarrow 0$$

を得る。後は、上で構成した短完全列のYoneda Product (cup 積)を取れば良い。 □

最後に、系4.2の応用として、$L(z,h_0)$の指標を計算する。

まず、$q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ $(\mathrm{Im}\tau > 0)$とし、weight $\frac{1}{2}$のmodular form $\Theta_{n,m}(\tau)$及び$\eta(\tau)$を以下で定義する。

定義 4.1 1. **Dedekindのη函数：** $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$.

2. **theta函数：** $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ **及び** $n \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$**に対して、**

$$\Theta_{n,m}(\tau) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{m(k+\frac{n}{2m})^2}.$$

ここで、Vir-加群 V をhighest weight が(z,h)のhighest weight module とするとき、そのweigh分解を

$$V=\bigoplus_{n=0}^{\infty}V_{h+n}, \qquad V_{h+n}:=\{u\in V|L_0.u=(h+n)u\} \quad (n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

とする。このとき、

$$\mathrm{tr}_V q^{L_0-\frac{1}{24}c}:=\sum_{n=0}^{\infty}(\dim V_{h+n})q^{h+n-\frac{1}{24}z}$$

とおき、これをVのnormalized characterと呼ぶ。この函数 $\mathrm{tr}_{\{\cdot\}}q^{L_0-\frac{1}{24}c}$の加法性から、系 4.2を用いると、既約highest weight module $L(z,h_0)$のnormalized characterは以下の様に計算される：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{L(z,h_0)}q^{L_0-\frac{1}{24}c}&=\sum_{i\in\mathbf{Z}}(-1)^i\mathrm{tr}_{M(z,h_i)}q^{L_0-\frac{1}{24}c}\\&=\eta(\tau)^{-1}\sum_{i\in\mathbf{Z}}(-1)^iq^{h_i-\frac{1}{24}(z-1)}\\&=\eta(\tau)^{-1}\left(\Theta_{rp-sq,pq}(\tau)-\Theta_{rp+sq,pq}(\tau)\right).\end{aligned}$$

従って、$\mathrm{tr}_{L(z,h_0)}q^{L_0-\frac{1}{24}c}$はweight 0 のmodular formであることがわかる。

5 おち

以上、BPZ系列をざーと見てきたが、実は[FeFu1]では全ての$(z,h)\in(\mathrm{Vir}^0)^*$に対して、$M(z,h)$のJantzen Filtrationの構造を、あのたった2ページの論文の中で、決定している。 また、[FeFu2]では、Verma 加群のみならず、Fock module (正確には、semi-infinite form の上の表現)の構造を、(若干の不備があるとはいえ) 決定している。その主な道具は、§2で軽くおさらいをした、Jantzen Filtration 及びその一般化である。要するに、Virasoro代数VirはそのRank2的な特徴ゆえ[Ja], [Mal]の手法がほぼそのままの形で適用できるのである。以下、少し言い残したことを述べる。まず、前節で述べた様に、BPZ系列に属する既約表現$L(z,h_0)$のnormalized characterはweight 0のmodular formになっている。そこで、BPZ系列を指定するときのDataの内、(r,s)を協調して$\chi_{r,s}(\tau):=\mathrm{tr}_{L(z,h_0)}q^{L_0-\frac{1}{24}c}$とおくと、vector space $\sum_{r,s}\mathbb{C}\chi_{r,s}(\tau)$は$SL_2(\mathbb{Z})$の作用で不変である。このような、表現のクラスはBPZ系列に限られることが[FeFu1]の応用でわかる。このことは、[BPZ]で重要な役割を果たしているのだが、`指標の保型性' と `無限自由度の対称性を持つ可積分系' との間には一般にどういう関係があるのであろうか？何か、普遍的な原理が支配しているように思うのだが、残念ながら（少なくとも）私にはそれが何なのか神秘的な現象に見えるだけで、全くわからない。

そこで、私なりにあがき、取り敢えずVirasoro代数の表現について少しでも理解したい、と格闘した結果が、大阪大学の古閑　義之氏と共同で執筆中の[IK]にまとめられてある（予定である。）そこには、物理的に重要と思えるVirasoro代数の表現論のうち、特にまとまった文献が無いか、あるいは証明が（少なくとも私の知る限り)、文献の上では存在しないと思える内容に触れてあるので、興味をもたれたら、是非一読の上、批判をしていただきたい。

最後に、ここ数年の共同研究者の1人である古閑氏、及びこの短気(!?)共同研究で発表の機会を与えていただいた永友　清和氏に感謝します。

参考文献

[BPZ] Belavin A. A., Polyakov A. M. and Zamolodchikov A. B., *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B 241**, (1984), 333–380.

[FeFu1] Feigin B.L. and Fuchs D.B., *Verma Modules over the Virasoro Algebra*, Funkts. Anal. Prilozhen., **17**, (1983), 91–92.

[FeFu2] Feigin B.L. and Fuchs D.B., *Representations of the Virasoro algebra*, Adv. Stud. Contemp. Math. **7**, 465–554, Gordon and Breach Science Publ. New York, 1990.

[IK] Iohara, K. and Koga, Y., 図書、執筆中.

[Ja] Jantzen J.C., *Moduln mit einem höchsten Gewicht*, Lect. Notes in Math. **750** Springer-Verlag, 1979.

[Mal] Malikov F.G., *Verma modules over Kac-Moody algebras of rank* 2, Leningrad Math. J., **2**, No. 2, (1991), 269–286.

[TK] Tsuchiya A. and Kanie Y., *Fock Space Representations of the Virasoro Algebra – Intertwining Operators –*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **22**, (1986), 259–327.